Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 5

Abgabe: Freitag, den 01. Dezember 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 5.1 *(1+1+1+1 Punkte)*

Diese Aufgabe knüpft an Aufgabe 4.3 an: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $M_{n\times n}(K)$ die Menge aller $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus K mit der komponentenweise Addition $+$ und der Matrix-Multiplikation $\cdot$ (vgl. Vorlesung). Prüfen Sie auf folgende Eigenschaften:

(a) Kommutativität von $\cdot$
(b) Distributivität von $\cdot$ und $+$
(c) Existenz eines neutralen Elements für $\cdot$
(d) $M_{n\times n}(K)$ ist bzgl. $\cdot$ integer

Um was für ein mathematisches Objekt handelt es sich bei $(M_{n\times n}(K), +, \cdot)$?

Aufgabe 5.2 *(2+2+2 Punkte)*

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne nachfolgend $+$ die komponentenweise Addition für Matrizen und $\cdot$ die Matrix-Multiplikation.

(a) Betrachten Sie
$$M_1 := \left\{ A \in M_{2\times 2}(K) \mid \exists\, a \in K\colon A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \vee A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
Prüfen Sie, ob $(M_1, +, \cdot)$ ein Körper ist.

(b) Betrachten Sie
$$M_2 := \{A \in M_{n\times n}(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$
Prüfen Sie, ob $(M_2, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(c) Betrachten Sie
$$M_3 := \left\{ A \in M_{n\times n}(K) \mid \exists\, a \in K\colon A = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
Prüfen Sie, ob $(M_3, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 5.3 *(2+2 Punkte)*

In dieser Aufgabe bezeichne für einen beliebigen Körper K, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $i = 1, \ldots, m$ und $j = 0, \ldots, n$, Z_A^i die i^{te} *Zeile von* A und S_A^j die j^{te} *Spalte von* A.
Es sei nun ein Körper K, $m, n, l \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times l}(K)$ fixiert.

(a) Beweisen Sie für $i = 1, \ldots, m$, dass $Z_{A\cdot B}^i = Z_A^i \cdot B$ gilt. Folgern Sie, dass die Zeilen von $A \cdot B$ Linearkombinationen der Zeilen von B sind.
(b) Beweisen Sie für $j = 1, \ldots, l$, dass $S_{A\cdot B}^j = A \cdot S_B^j$ gilt. Folgern Sie, dass die Spalten von $A \cdot B$ Linearkombinationen der Spalten von A sind.

Aufgabe 5.4 *(2 Punkte)*

Ziel dieser Aufgabe ist es den Beweis von Satz 8.3 zu vervollständigen: Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m\times n}(K)$, e eine elementare Zeilenumformung des Typs 2, $I_m \in M_{m\times m}(K)$ die Einheitsmatrix und $E := e(I_m)$. Beweisen Sie $e(A) = E \cdot A$.